ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXVI, zeszyt 1 — 1978

LUDWIK BORKOWSKI

AKSJOMATYCZNA TEORIA KONSEKWENCJI A WYNIKANIE LOGICZNE

W artykule tym zajmiemy się dwoma zagadnieniami: (1) czy i w jakim zakresie termin „*Cn*", występujący w aksjomatycznej teorii konsekwencji [1], może być interpretowany jako termin denotujący wynikanie logiczne; (2) w jaki sposób można rozszerzyć aksjomatyczną teorię konsekwencji, wzbogacając ją o semantyczne pojęcie wynikania logicznego.

§ **1.** Przyjmujemy, że *S* jest niepustym zbiorem zdań [2], zamkniętym ze względu na operacje tworzenia negacji i implikacji, oraz że zmienne α, β, γ przebiegają zbiór *S*, a zmienne *X*, *Y*, *Z* — zbiór podzbiorów zbioru *S*.

Przy tych oznaczeniach aksjomatyczną teorię konsekwencji można oprzeć na aksjomatach [3]:

A 1 $X \subset CnX \subset S$

A 2 $X \subset Y \rightarrow CnX \subset CnY$

A 3 $CnCnX \subset CnX$

A 4 $\alpha \in CnX \rightarrow \bigvee_{Y} (Y \subset X \wedge \bar{\bar{Y}} < \aleph_0 \wedge \alpha \in CnY)$

A 5 $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in CnX \rightarrow \beta \in Cn(X) \cup \{\alpha\})$

A 6 $\beta \in Cn(X \cup \{\alpha\}) \rightarrow \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in CnX$

A 7 $S \subset Cn\{\alpha, \sim\alpha\}$

A 8 $Cn\{\alpha\} \cap Cn\{\sim\alpha\} \subset Cn\emptyset$

A 9 $0 < \bar{\bar{S}} \leqslant \aleph_0$

A 4 nosi nazwę aksjomatu o finitystyczności konsekwencji.

---

[1] Mówiąc w tym artykule o aksjomatycznej teorii konsekwencji mamy na myśli aksjomatyczną teorię konsekwencji wyznaczonej przez klasyczny rachunek zdań.

[2] Termin „zdanie" jest używany w tym artykule w sensie szerszym dla oznaczania zarówno zdań w sensie węższym, jak i form zdaniowych.

[3] Por. A. Tarski. *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik.* „Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" 23: 1930 s. 22-29.

Litery M będziemy używać dla oznaczania modelu dowolnej teorii rozumianego jako układ uporządkowany $\langle U, Q\rangle$. Zbiór niepusty U stanowi uniwersum modelu, Q — funkcję interpretującą, tj. funkcję przyporządkowującą stałym pozalogicznym teorii przedmioty *n-go* rzędu ($n \geqslant 0$) o bazie U. Przy tym przedmiotami *0-go* rzędu o bazie U są elementy zbioru U, przedmiotami *n-ego* rzędu o bazie U są zbiory przedmiotów rzędów mniejszych od n o bazie U, przy czym przynajmniej jeden z nich jest przedmiotem *n-1-go* rzędu o bazie U.

W myśl tego określenia mówiąc o modelach teorii mamy na myśli modele teorii dowolnego rzędu.

Ograniczamy się jednak tylko do modeli niepustych, tj. do modeli o niepustym uniwersum, z uwagi na zastosowanie wprowadzonego pojęcia w definicji wynikania logicznego.

Zakładając znaną definicję spełniania i prawdziwości w modelu M, oznaczymy symbolem „$E(M)$" zbiór zdań prawdziwych w modelu M.

Symbolem „WnX" oznaczymy zbiór zdań wynikających logicznie ze zdań zbioru X.

Ograniczając się do modeli o niepustym uniwersum można zdefiniować pojęcie wynikania logicznego w następujący sposób:

D I $\alpha \in \mathrm{Wn}X \equiv \bigwedge_{M}(X \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$

Zgodnie z uwagą dotyczącą pojęcia modelu określa się w D I pojęcie wynikania logicznego dla teorii dowolnego rzędu.

W dowodach twierdzeń ustalających niektóre własności wynikania logicznego będziemy korzystać z D I i ze wzorów I, II, wynikających z ogólnie przyjmowanej definicji zbioru $E(M)$.

I $\ulcorner \sim\alpha \urcorner \in E(M) \equiv \alpha \notin E(M)$

II $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in E(M) \equiv \alpha \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$

T w i e r d z e n i e I. W aksjomatach teorii konsekwencji, z pominięciem aksjomatu o finitystyczności konsekwencji, można termin „*Cn*" interpretować jako termin denotujący wynikanie logiczne.

D o w ó d. Zgodnie z definicją D I (i przyjętymi oznaczeniami): $\mathrm{Wn}X \subset S$. Udowodnimy twierdzenia, które otrzymujemy z aksjomatów A 1-A 3 i A 5-A 8 przez zastąpienie terminu „Cn" przez termin „Wn".

T 1		$X \subset \mathrm{Wn}X$	(D I)
T 2		$X \subset Y \rightarrow \mathrm{Wn}X \subset \mathrm{Wn}Y$	
	1	$X \subset Y$	z.
	2	$\alpha \in \mathrm{Wn}X$	z.
	3	$\bigwedge_{M} (X \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$	D I, 2
	1.1	$Y \subset E(M)$	z.d.
	1.2	$X \subset E(M)$	1, 1.1

	1.3	$\alpha \in E(M)$	3, 1.2
	4	$\bigwedge_M (Y \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$	1.1 → 1.3
		$\alpha \in WnY$	D I, 4
T	3	$X \subset E(M) \rightarrow WnX \subset E(M)$	(D I)
T	4	$WnWnX \subset WnX$	
	1	$\alpha \in WnWnX$	z.
	2	$\bigwedge_M (WnX \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$	D I, 1
	1.1	$X \subset E(M)$	z.d.
	1.2	$WnX \subset E(M)$	T 3, 1.1
	1.3	$\alpha \in E(M)$	2, 1.2
	3	$\bigwedge_M (X \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$	1.1 → 1.3
		$\alpha \in WnX$	D I, 3
T	5	$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in WnX \rightarrow \beta \in Wn(X \cup \{\alpha\})$	
	1	$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in WnX$	z.
	2	$\bigwedge_M (X \subset E(M) \rightarrow \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in E(M))$	D I, 1
	1.1	$X \cup \{\alpha\} \subset E(M)$	z.d.
	1.2	$X \subset E(M)$	1.1
	1.3	$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in E(M)$	2, 1.2
	1.4	$\alpha \in E(M)$	1.1
	1.5	$\beta \in E(M)$	II, 1.3, 1.4
	3	$\bigwedge_M (X \cup \{\alpha\} \subset E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	1.1 → 1.5
		$\beta \in Wn(X \cup \{\alpha\})$	D I, 3
T	6	$\beta \in Wn(X \cup \{\alpha\}) \rightarrow \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in WnX$	
	1	$\beta \in Wn(X \cup \{\alpha\})$	z.
	2	$\bigwedge_M (X \cup \{\alpha\} \subset E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	D I, 1
	3	$\bigwedge_M [X \subset E(M) \rightarrow (\alpha \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M))]$	2
	4	$\bigwedge_M (X \subset E(M) \rightarrow \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in E(M))$	3, II
		$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in WnX$	D I, 4
T	7	$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner, \alpha \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$	(II)
T	8	$\ulcorner \alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta) \urcorner \in E(M)$	
	1	$\alpha \in E(M) \rightarrow (\alpha \notin E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	$(p \rightarrow (\sim p \rightarrow q))$
	2	$\alpha \in E(M) \rightarrow (\ulcorner \sim \alpha \urcorner \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	1, I
	3	$\alpha \in E(M) \rightarrow \ulcorner \sim \alpha \rightarrow \beta \urcorner \in E(M)$	2, II
	4	$\ulcorner \alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta) \urcorner \in E(M)$	3, II
T	9	$S \subset Wn\{\alpha, \sim \alpha\}$	
	1	$\beta \in S$	z.
	1.1	$\{\alpha, \sim \alpha\} \subset E(M)$	z.d.

1.2	α, $\ulcorner\sim\alpha\urcorner \in E(M)$	1.1
1.3	$\beta \in E(M)$	T 7, T 8, 1.2
2	$\bigwedge_{M}(\{\alpha, \sim\alpha\} \subset E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	1.1 $\rightarrow$ 1.3
	$\beta \in Wn\{\alpha, \sim\alpha\}$	D I. 2
T 10	$\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner, \ulcorner\sim\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$	
1	$\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in E(M)$	z.
2	$\ulcorner\sim\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in E(M)$	z.
3	$\alpha \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$	1, II
4	$\ulcorner\sim\alpha\urcorner \in E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$	2, II
5	$\alpha \notin E(M) \rightarrow \beta \in E(M)$	4, I
	$\beta \in E(M)$	3, 5
T 11	$\alpha \in Wn\emptyset \rightarrow \alpha \in E(M)$	(D I)
T 12	$Wn\{\alpha\} \cap Wn\{\sim\alpha\} \subset WnO$	
1	$\beta \in Wn\{\alpha\}$	z.
2	$\beta \in Wn\{\sim\alpha\}$	z.
3	$\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in Wn\emptyset$	T 6, 1
4	$\ulcorner\sim\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in Wn\emptyset$	T 6, 2
5	$\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in E(M)$	T 11, 3
6	$\ulcorner\sim\alpha \rightarrow \beta\urcorner \in E(M)$	T 11, 4
7	$\beta \in E(M)$	T 10, 5, 6
8	$\bigwedge_{M}(\emptyset \subset E(M) \rightarrow \beta \in E(M))$	7
	$\beta \in Wn\emptyset$	D I. 8

Twierdzenia T 1, T 2, T 4, T 5, T 6, T 9, T 12 otrzymuje się odpowiednio z aksjomatów A 1, A 2, A 3, A 5, A 6, A 7, A 8 przez zastąpienie „*Cn*" przez „*Wn*", co dowodzi twierdzenie I.

Z twierdzenia I wynika, że również we wszystkich twierdzeniach teorii konsekwencji udowodnionych wyłącznie na podstawie aksjomatów A 1-A 3, A 5-A 9 (a więc we wszystkich twierdzeniach teorii konsekwencji udowodnionych bez odwoływania się do aksjomatu o finitystyczności konsekwencji) można termin „*Cn*" interpretować jako termin denotujący wynikanie logiczne.

W aksjomatycznej teorii konsekwencji wprowadza się m. in. następujące definicje:

D 1 $L = Cn\emptyset$

D 2 $X \in Syst \equiv CnX \subset X$

D 3 $X\ aeq\ Y \equiv CnX = CnY$

D 4 $X \in Nsp \equiv CnX \neq S$

D 5 $X \in Zpł \equiv \bigwedge_{\alpha} (\alpha \in CnX \vee Cn(X \cup \{\alpha\}) = S)$

D 6 $X \in Nzl \equiv \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha \notin Cn(X - \{\alpha\})$

D 7 $\alpha \in EntX \equiv \alpha \in CnX \vee Cn(X \cup \{\alpha\}) = S$

D 8 $X \in BzY \equiv X \in Nzl \wedge X\ aeq\ Y$

D 9 $\alpha \in Cn^{-1} X \equiv \bigvee_{\beta \in X} \beta \in Cn\{\alpha\}$

D 9 jest definicją funkcji odrzucania Cn^{-1}.

Zastępując w D 1-D 9 termin „*Cn*" terminem „*Wn*" otrzymujemy definicje analogicznych pojęć zdefiniowanych przy pomocy pojęcia wynikania logicznego.

D 1′ $T = Wn\emptyset$

D 2′ $X \in WSyst \equiv WnX \subset X$

D 3′ $X\ Waeq\ Y \equiv WnX = WnY$

D 4′ $X \in WNsp \equiv WnX \neq S$

D 5′ $X \in WZpl \equiv \bigwedge_{\alpha} (\alpha \in WnX \vee Wn(X \cup \{\alpha\}) = S)$

D 6′ $X \in WNzl \equiv \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha \notin Wn(X - \{\alpha\})$

D 7′ $\alpha \in WEntX \equiv \alpha \in WnX \vee Wn(X \cup \{\alpha\}) = S$

D 8′ $X \in WBzY \equiv X \in WNzl \wedge X\ Waeq\ Y$

D 9′ $\alpha \in Wn^{-1}X \equiv \bigvee_{\beta \in X} \beta \in Wn\{\alpha\}$

Podczas gdy zbiór *L*, zdefiniowany w D 1, jest zbiorem tez logicznych, to zbiór T, zdefiniowany w D 1′, jest zbiorem tautologii logicznych. Z podanych definicji wynika

T 13 $\alpha \in T \equiv \bigwedge_{M} \alpha \in E(M)$

W myśl T 13 tautologie logiczne są zdaniami prawdziwymi w każdym niepustym modelu.

Z twierdzenia I z uwagi na postać definicji D 1′-D 9′ otrzymujemy:

T w i e r d z e n i e II. W twierdzeniach teorii konsekwencji udowodnionych na podstawie definicji D 1-D 9 i aksjomatów bez aksjomatu o finitystyczności konsekwencji można termin „*Cn*" interpretować jako termin denotujący wynikanie logiczne, jeśli terminy wprowadzone przez D 1-D 9 zastąpimy przez terminy wprowadzone przez D 1′-D 9′.

Twierdzenia I i II dają odpowiedź na pytanie, w jakim zakresie termin „*Cn*" występujący w aksjomatycznej teorii konsekwencji może być interpretowany jako termin denotujący wynikanie logiczne.

Z definicji D I i D 1′ wynika

T 14 $E(M) \in WSyst$

Zbiór zdań prawdziwych w niepustym modelu jest systemem ze względu na wynikanie logiczne.

W teorii systemów dedukcyjnych nieraz rozumie się pojęcie systemu ogólniej w taki sposób, że zarówno zbiór tez systemu aksjomatycznego, jak i zbiór zdań prawdziwych w jakimś modelu są systemami. Pierwszy jest systemem ze względu na funkcję konsekwencji, drugi jest — w myśl

T 14 — systemem ze względu na wynikanie logiczne. Dla systemów w tym sensie prawdziwe są wszystkie tezy teorii konsekwencji, których dotyczą twierdzenia I i II.

§ 2. Dla rozszerzenia aksjomatycznej teorii konsekwencji przez wzbogacenie jej o pojęcie wynikania logicznego dołączamy do aksjomatów A 1-A 9 wzory I, II jako A 10 i A 11 [4]. Oprócz definicji D 1-D 9 przyjmujemy definicje D I, D 1'-D 9'. Przyjmujemy ponadto aksjomat:

A 12 $Cn\ E(M) \subset E(M)$

Stwierdza on, że konsekwencje zdań prawdziwych w niepustym modelu *M* są prawdziwe w *M*.

W myśl A 12 konsekwencja, o której mówi się w aksjomatycznej teorii konsekwencji, jest wyznaczona przez reguły logiczne (dedukcyjne). O pewnej adekwatności tej interpretacji świadczy sposób definiowania terminu „*Cn*” w systemie o terminach pierwotnych *L* i *S*. Definiuje się tam mianowicie *CnX* jako najmniejszy zbiór zawierający zbiór $X \cup L$ i zamknięty ze względu na odrywanie [5].

Z A 12 i D 1 wynika, że zbiór E (M) jest systemem ze względu na funkcję konsekwencji.

W tak rozszerzonej aksjomatycznej teorii konsekwencji można dowodzić różne twierdzenia ustalające związki zachodzące między konsekwencją a wynikaniem logicznym i pojęciami zdefiniowanymi odpowiednio przy ich pomocy. Podamy tu przykładowo kilka takich twierdzeń.

T 15 $CnX \subset WnX$

1	$\alpha \in CnX$	z.
1.1	$X \subset E(M)$	z.d.
1.2	$CnX \subset Cn\ E(M)$	A 2, 1.1
1.3	$\alpha \in E(M)$	1, 1.2, A 12
2	$\bigwedge_{M} (X \subset E(M) \rightarrow \alpha \in E(M))$	1.1 → 1.3
	$\alpha \in WnX$	D I, 2

Z T 15, D 1 i D 1' wynika

T 16 $L \subset T$

Każda teza logiczna jest tautologią logiczną.

---

[4] Rozszerzenie tej teorii o wzór I i wzór $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner \in E(M) \equiv \alpha \in E(M) \vee \beta \in E(M)$, gdzie M jest dowolnym modelem, zawiera praca A. W. Pogorzelskiego i J. Słupeckiego (*Dowód pełności klasycznego rachunku zdań na gruncie aksjomatycznej metodologii*. „Acta Universitatis Wratislaviensis”. Seria B. 1962 nr 12 s. 11-18).

[5] A. Tarski. *Grundzüge des Systemenkalküls*. I. „Fundamenta Mathematicae” 25: 1935 s. 503-526.

Z T 15, T 1, T 4 wynika

T 17 $CnWnX = WnX$

Z A 2 i A 12 wynika

T 18 $X \subset E(M) \rightarrow CnX \subset E\,M$

a stąd

T 18a $X \subset E(M) \wedge \alpha \notin E(M) \rightarrow \alpha \notin CnX$

T 18a jest podstawą modelowej metody dowodów niezależności. Dla udowodnienia, że α jest niezależne od zdań zbioru X, tj. że $\alpha \notin CnX$, wystarczy znaleźć model, w którym prawdziwe są wszystkie zdania zbioru X, a zdanie α jest fałszywe.

T 19 $WSyst \subset Syst$
T 20 $X \in WSyst \rightarrow CnX = WnX$
T 21 $X, Y \in WSyst \rightarrow (X\ aeq\ Y \equiv X\ Waeq\ Y)$
T 22 $WNsp \subset Nsp$
T 23 $WNzl \subset Nzl$
T 24 $WZpł \subset Zpł$
T 25 $WEnt \subset Ent$
T 26 $Cn^{-1}X \subset Wn^{-1}X$
T 27 $X \subset S - E(M) \rightarrow Cn^{-1}X \subset S - E(M)$

Zbiór $S - E(M)$ jest zbiorem zdań fałszywych w modelu M. T 27 stwierdza, że zdania odrzucone na podstawie zdań fałszywych w modelu M są zdaniami fałszywymi w M.

W dowodach twierdzeń T 15-T 27 korzysta się z A 12. Bez odwoływania się do tego aksjomatu, a tylko na podstawie D I i D 9′ można udowodnić
T 28 $X \subset S - E(M) \rightarrow Wn^{-1}X \subset S - E(M)$

T 28 stwierdza, że zdania W-odrzucone na podstawie zdań fałszywych w modelu M są fałszywe w M.

Z definicji D I wynika, że $WnE(M) \subset E(M)$.

Z definicji D I i A 10 wynika, że $E(M) \in WNsp$.

Na podstawie A 10 i A 12 można udowodnić tezę:

T 29 $E(M) \in Nsp$

Na podstawie T 29 i T 18 dowodzi się tezę:

T 30 $X \subset E(M) \rightarrow CnX \in Nsp$

Teza T 30 jest podstawą modelowej metody dowodów niesprzeczności systemu aksjomatycznego, polegającej na znalezieniu modelu, w którym prawdziwe są wszystkie aksjomaty systemu. Stąd — w myśl T 30 — wynika, że zbiór tez tego systemu, tj. zbiór konsekwencji jego aksjomatów, jest niesprzeczny.

ON THE AXIOMATIC THEORY OF CONSEQUENCE AND THE LOGICAL CONSEQUENCE

Summary

It is considered in what extent the term "Cn" occurring in the axiomatic theory of consequence can be interpreted as a term denoting the logical consequence. Two theorems giving the answer to this question are proved. An extension of the axiomatic theory of consequence containing the semantical notion of the logical consequence is sketched.